ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2013, том 77, № 12, с. 1770–1773

УДК 517.9

# ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

© 2013 г. Д. И. Данилов[1], А. А. Короновский[1, 2], О. И. Москаленко[1, 2]
*E-mail: danilov_dm@mail.ru*

Проведено исследование перемежающегося поведения пространственно распределенных систем на примере однонаправленно связанных диодов Пирса. Показано, что для данной системы вблизи границы установления режима фазовой хаотической синхронизации характерен такой же тип перемежаемости, как и для конечномерных систем, а именно перемежаемость игольного ушка, которая фактически эквивалентна и типу перемежаемости типа I с шумом в закритической области.

**DOI:** 10.7868/S0367676513120077

## ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальное явление перемежаемости представляет большой интерес для исследователей, так как его можно наблюдать в самых различных системах – физических, биологических, химических, социальных и т.д. Перемежаемость классифицируют по нескольким типам: перемежаемость типов I–III [1], *on-off*-перемежаемость [2], перемежаемость игольного ушка [3], перемежаемость кольца [4]. Каждый из этих типов характеризуется тем, что во временном ряду (при фиксированных значениях управляющих параметров) присутствуют два различных режима, чередующиеся друг с другом. В то же самое время каждый тип перемежаемости обладает своими особенностями и характеристиками.

Одним из наиболее интересных вопросов при исследовании явления перемежаемости является переход в системе связанных осцилляторов от асинхронной динамики к синхронной через перемежаемость. На данный момент для систем с малым числом степеней свободы известны два типа перемежающегося поведения хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты взаимодействующих осцилляторов различаются мало: перемежаемость типа I и перемежаемость игольного ушка [3]. При этом если уменьшать параметр связи, то после разрушения синхронного режима следует сначала режим перемежаемости игольного ушка, а затем режим перемежаемости типа I. В работах [5, 6] на примере систем с малым числом степеней свободы показано, что режим перемежаемости игольного ушка эквивалентен режиму перемежаемости типа I с шумом в закритической области значений управляющего параметра. Будет ли эта закономерность наблюдаться для более сложных, а именно пространственно распределенных, систем? Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПОВ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ДИОДАХ ПИРСА

В качестве модельной системы были выбраны два однонаправленно связанных диода Пирса. Диод Пирса [7] представляет собой две бесконечные плоские параллельные сетки, пронизываемые бесконечно широким потоком электронов. Пространство между сетками заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов с плотностью, равной невозмущенной плотности заряда в электронном потоке. При использовании гидродинамического приближения исследуемая система описывается системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \nu_{1,2}}{\partial t} = -\nu_{1,2}\frac{\partial \nu_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x},\\ \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_{1,2}\nu_{1,2})}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} = -\alpha_{1,2}^2(\rho_{1,2}-1),\end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\nu_{1,2}(0,t) = 1,\quad \rho_{1,2}(0,t) = 1,\quad \varphi_{1,2}(0,t) = 0, \tag{2}$$

где $\varphi$ – безразмерный потенциал поля пространственного заряда, $\nu$ – безразмерная плотность по-

[1] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

[2] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина

тока, $x$ – безразмерная координата, $t$ – безразмерное время, $\alpha$ – параметр Пирса, являющийся управляющим параметром для каждой системы: $\alpha_1 = 2.858\pi$, $\alpha_2 = 2.862\pi$. Индексы 1 и 2 обозначают ведущую и ведомую системы соответственно.

Однонаправленная связь между системами осуществляется при помощи изменения значения безразмерного потенциала на правой границе ведомой системы, в то время как потенциал на правой границе ведущей системы остается неизменным:

$$\begin{cases} \varphi_1(1,t) = 0, \\ \varphi_2(1,t) = \varepsilon(\rho_1(1,t) - \rho_2(1,t)). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon$ – параметр связи, $\rho_{1,2}(1,t)$ – колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой системы.

В данной системе при заданных таким образом параметрах границе фазовой хаотической синхронизации соответствует значение параметра связи $\varepsilon_{PS} \approx 0.012$.

В работах [5, 6] для сопоставления режимов перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости игольного ушка использован анализ распределений длительностей ламинарных фаз, а также зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Чтобы построить такие распределения, необходимо выделить ламинарные и турбулентные фазы из временной реализации. Для этого в данных работах использован метод, предложенный в [8]. Суть его заключается в следующем: в качестве исследуемой величины рассматривается разность фаз взаимодействующих систем $\Delta\varphi(t)$, при этом для каждой системы фаза $\varphi(t)$ вводится как угол поворота на фазовой плоскости:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \quad (4)$$

Рассматриваемые фазы сводятся к диапазону шириной $2\pi$. При таком рассмотрении области синхронной (ламинарные участки) и асинхронной (турбулентные участки) динамики оказываются качественно различными, что позволяет достаточно просто разделить всю анализируемую временную реализацию на ламинарные и турбулентные фазы.

Тем не менее при анализе выбранной нами модельной системы с помощью такого метода из-за более сложной динамики (обусловленной пространственной распределенностью анализируемой системы) возникает целый ряд трудностей, в результате чего этот метод становится неприменимым к таким системам с бесконечномерным пространством, поэтому в настоящей работе для выделения ламинарных и турбулентных фаз использован модифицированный метод, анализирующий скользящее среднее разности фаз вместо непосредственно самой разности фаз взаимодействующих систем:

$$\Delta\varphi_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta\varphi_i, \quad (5)$$

где $\Delta\varphi_i$ – значение разности фаз в соответствующий момент отсчета, а $N$ – количество значений разности фаз, по которому проводится усреднение. Такой модифицированный метод позволяет успешно и точно выделять все ламинарные и турбулентные фазы даже во временных реализациях систем со сложной динамикой, таких как пространственно распределенные системы.

При помощи этого метода была проанализирована динамика выбранной модельной системы – однонаправленно связанных диодов Пирса. Были получены распределения длительностей ламинарных фаз для различных значений параметра связи. Известно [9], что такие распределения в режиме перемежаемости игольного ушка (и соответственно перемежаемости типа I с шумом в закритической области) удовлетворяют экспоненциальному закону

$$N(\tau) = T^{-1}\exp\left(\frac{-\tau}{T}\right), \quad (6)$$

где $T$ – средняя длительность ламинарных фаз, определяемая для перемежаемости игольного ушка следующим выражением [3, 10]:

$$-\ln\left(\frac{1}{T}\right) = c_0 - c_1\left|\varepsilon_{PS} - \varepsilon\right|^{-1/2}, \quad (7)$$

($c_0$ и $c_1$ – константы), а для перемежаемости типа I с шумом в закритической области значений управляющего параметра выражением [11]:

$$T = \frac{1}{k\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}}\exp\left(\frac{4(\varepsilon - \varepsilon_c)^{3/2}}{3D}\right), \quad (8)$$

где $k$ – константа, $D$ – интенсивность шума, $\varepsilon_c$ – критическое значение управляющего параметра.

Представляет интерес, будут ли такие закономерности перемежающегося поведения конечномерных систем соблюдаться в пространственно распределенных системах. Для того чтобы ответить на этот вопрос, сопоставим численные результаты, полученные для связанных диодов Пирса, с теоретическими зависимостями (6)–(8). На рис. 1 приведены полученные распределения длительностей ламинарных фаз, а также соответствующие теоретические зависимости. Видно, что рассчитанные распределения хорошо согласуются с экспоненциальным законом, предсказываемым теорией.

Если режимы перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I с шумом являются единым типом поведения, то зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности должна удовлетворять как уравнению (7), так и уравнению (8). На рис. 2 и 3 приведены численно рассчитанные зависимости, а

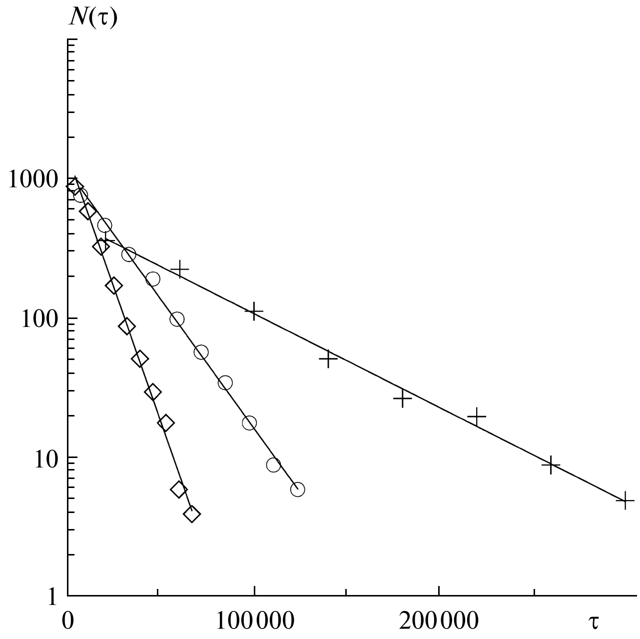


**Рис. 1.** Распределения длительности ламинарных фаз однонаправленно связанных диодов Пирса от времени. Точки, соответствующие значению параметра связи $\varepsilon = 0.0075$, показаны ромбами, значению $\varepsilon = 0.008$ – кружками, значению $\varepsilon = 0.0085$ – крестиками.

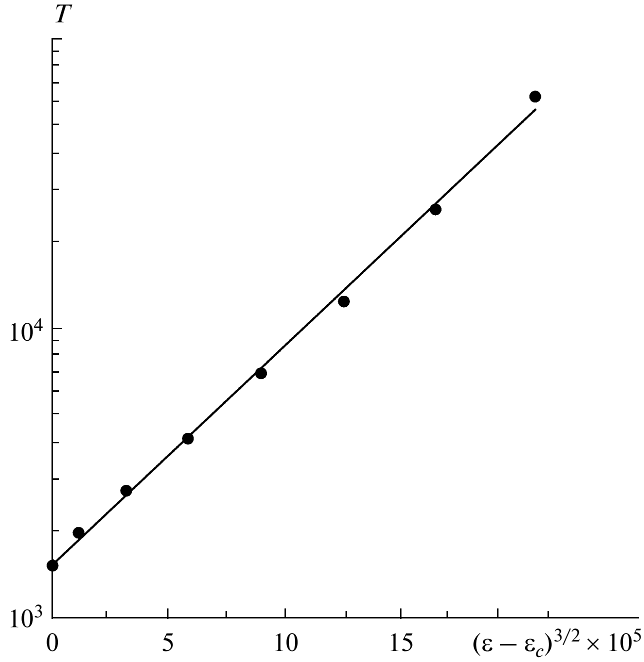


**Рис. 3.** Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Точками показаны численные результаты, сплошной линией – теоретическая зависимость для режима перемежаемости типа I с шумом.

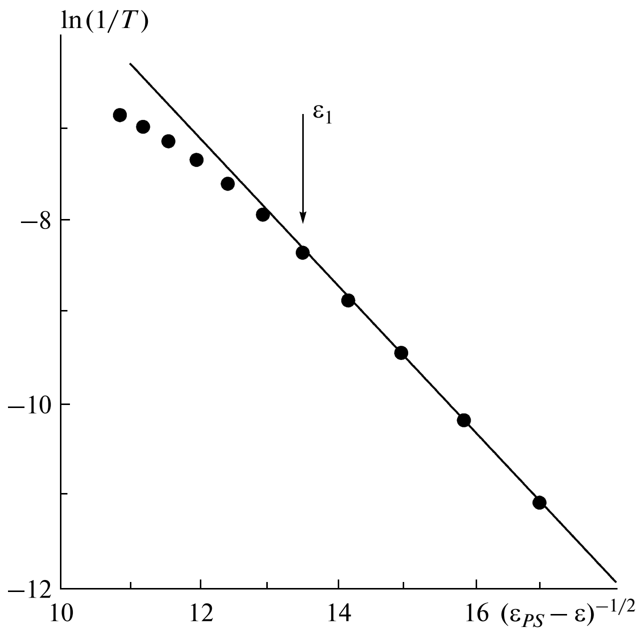


**Рис. 2.** Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Точками показаны численные результаты, сплошной линией – теоретическая зависимость для режима перемежаемости игольного ушка. Стрелкой показано значение $\varepsilon_1 = 0.0065$ возникновения перемежаемости игольного ушка.

также соответствующие им теоретические кривые. Видно, что перемежающееся поведение двух связанных диодов Пирса можно трактовать и как перемежаемость игольного ушка, и как перемежаемость типа I в присутствии шума, при этом в обоих случаях наблюдается отличное соответствие численных данных и теоретических зависимостей. Это позволяет утверждать, что, во-первых, в пространственно распределенных системах вблизи границы фазовой хаотической синхронизации реализуется тот же самый тип перемежающегося поведения, что и в системах с малым числом степеней свободы. Во-вторых, полученные результаты могут быть дополнительным доказательством того, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом – это один и тот же тип динамики нелинейных систем.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование динамики пространственно распределенных систем в области перемежающегося поведения на примере однонаправленно связанных диодов Пирса. Показано, что в исследуемой системе наблюдаются те же типы перемежаемости, что и в некоторых конечномерных системах, а именно перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для пространственно распределенных систем характерны те же закономерности перемежающегося поведения, что и для конечномерных систем. Также получено дополнительное подтверждение единства режима перемежаемости игольного ушка и режима перемежаемости типа I с шумом.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.1289). А.К. благодарит фонд некоммерческих программ "Династия" за поддержку в проведении научных исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Dubois M., Rubio M., Berge P.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1446.
2. *Platt N. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 279.
3. *Pikovsky A.S. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 47.
4. *Hramov A.E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 114101.
5. *Hramov A.E. et al.* // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 1646.
6. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. № 1. С. 24.
7. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Лекции по СВЧ-электронике для физиков, Т. 1, 2. М.: Физматлит, 2003.
8. *Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И.* // Письма в ЖТФ. 2010. №10. С. 31.
9. *Куровская М.К.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. № 24. С. 48.
10. *Lee K.J., Kwak Y., Lim T.K.* // Phys Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 321.
11. *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189.