ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2014, том 78, № 12, с. 1568–1572

УДК 530.182,51-73

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ СЛОЖНОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ ЕЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

© 2014 г. **В. А. Максименко[1, 2], В. В. Макаров[1, 2], А. А. Короновский[1, 2], А. Е. Храмов[1, 2], О. И. Москаленко[1, 2]**

E-mail: maximenkovl@gmail.com, vladmak404@gmail.com

Предложен метод анализа структурных изменений и процессов кластеризации в сложных сетях при помощи рассмотрения макроскопических характеристик (суммарного вектора состояния системы), основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании. Показано, что с помощью предложенного метода возможна эффективная диагностика изменений топологии сети и обнаружение структурных кластеров.

DOI: 10.7868/S0367676514120217

ВВЕДЕНИЕ

Исследование синхронных режимов и процессов образования структур в сетях со сложной топологией является в данный момент одной из наиболее важных задач, стоящих перед мировым научным сообществом. Современные научные представления о мире все более сходятся к концепции его сетевой архитектуры [1]. Различные сетевые структуры возникают на всех уровнях организации биологических [2], технологических [3] и социальных систем [4, 5], от нейронных ансамблей [6, 7] до сетей городов и популяций [8].

Наличие большого количества элементов, входящих в сети, а также неравномерно распределенных между ними входящих и исходящих связей обусловливает целый ряд различных явлений коллективной динамики составных частей сетевой структуры, включая образование подсетей (кластеров) [9], состоящих из сильно связанных элементов, и возникновение синхронных режимов [10].

Синхронизация представляет собой одно из важнейших явлений, наблюдающихся в сложных сетях. В частности, в адаптивных сетях [11] наличие синхронизма в поведении взаимодействующих элементов обычно является главным фактором, обусловливающим временную эволюцию топологии сети.

[1] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

[2] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина”.

Модели сетевых структур, включающие в себя адаптивные механизмы, в последнее время все чаще применяются для описания процессов, протекающих в социальных системах и нейронных ансамблях [12, 13]. Описание эволюции топологии таких сетей позволяет разрабатывать математические интерпретации, наиболее приближенные к реальным сетям, в которых изменение связей во времени приводит к образованию различных структурных паттернов.

Однако следует отметить, что изучение реальных адаптивных сетей посредством построения математических моделей не всегда оказывается эффективным. Основная проблема анализа большинства систем с сетевой структурой — отсутствие необходимой информации о топологии, природе связей и динамическом состоянии отдельных элементов и образовавшихся подсетей. В данном случае построение модели, корректно учитывающей связи между взаимодействующими элементами и их изменение во времени, не представляется возможным, и, как правило, приходится работать с макроскопическими параметрами, характеризующими процессы, протекающие в сети. В качестве таких параметров, например, могут выступать суммарные сигналы электрической активности головного мозга, полученные посредством электроэнцефалографии и являющиеся продуктом взаимодействия отдельных нейронов многочисленного нейронного ансамбля. Подобные макроскопические параметры сети обладают нестационарными во времени характеристиками, и ожидается, что закономерности их эволюционной динамики могут быть сопоставлены с конкретными процессами формирования структуры сети на микроскопическом уровне, что, в свою очередь, позволит проводить анализ реальных сложных сетей на основе экспериментальных макроскопических характеристик.

Изучение данной возможности представляет большой интерес для различных областей науки, имеющих дело с исследованиями сложных сетевых структур. Получение информации о топологии сети и образовавшихся в ней синхронных режимов коллективной динамики при помощи рассмотрения макроскопических характеристик позволит продвинуться в понимании структурных особенностей и функционирования реальных сетей различной природы, которые проблематично исследовать известными методами анализа.

В настоящей работе проведено исследование коллективной динамики элементов сети на основе сети взаимодействующих фазовых осцилляторов Курамото [14, 15], топология которой меняется во времени согласно адаптивному механизму [11]. При этом основное внимание уделено анализу структуры данной сети и изучению процессов кластеризации при помощи рассмотрения макроскопической характеристики, которая в данном случае представлена суммарным сигналом взаимодействующих осцилляторов.

В работе приведено сопоставление полученных результатов макроскопического анализа с характеристиками, рассчитанными с использованием матриц связи исследуемой сети и векторов состояния отдельных элементов. При этом обнаружена связь между рассмотренным суммарным сигналом и микроскопическими параметрами, характеризующими топологию исследуемой сети.

ИССЛЕДУЕМАЯ СИСТЕМА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Одна из наиболее распространенных сетевых моделей – модель фазовых осцилляторов Курамото, предложенная в 1975 г. [16] в качестве математической интерпретации коллективной динамики химических и биологических осцилляторов. В последнее время различные модификации данной модели сети фазовых осцилляторов активно применяют для анализа процессов кластеризации и синхронизации, в том числе и в социальных системах [11].

В настоящем исследовании используется модифицированная модель Курамото, предложенная в работе [11], состоящая из $N = 200$ связанных осцилляторов. Каждый i-тый узел рассматриваемой сети характеризуется фазой φ_i и взаимодействует со всеми остальными $N - 1$ узлами. Динамика каждого осциллятора описывается уравнением

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \lambda \sum_j^N w_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \qquad (1)$$

где ω_i – заданные случайным образом натуральные частоты в диапазоне [1, 10], w_{ij} – вес связи, соединяющей узлы j и i, и λ – сила связи. Изначально фазы взаимодействующих элементов заданы случайно и распределены равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, при этом веса связей также заданы случайно. После переходного процесса в момент времени $t^* = 500$ происходит включение адаптационного механизма [11], в результате которого изменяется динамика сети. Результаты исследования подобных сетей с нестационарными связями свидетельствуют о том, что наличие адаптации является основной причиной, обусловливающей изменение топологии сети и образование в ней структурных кластеров [11], что делает такие сети наиболее интересными для анализа процессов возникновения структур.

В качестве макроскопического параметра, характеризующего динамику взаимодействующих осцилляторов (1), рассмотрим суммарный сигнал, порожденный исследуемой сетью

$$X(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t), \qquad (2)$$

где $N = 200$ – количество элементов, динамика каждого из которых во времени описывается законом $x_i(t) = A\cos(\varphi_i(t))$, где A – единичная амплитуда.

На рис. 1*а*, показана зависимость состояния $X(t)$ системы (2) от времени. Как отмечено выше, адаптационный механизм в сети включается при $t^* = 500$ (область адаптивной динамики выделена серым цветом). Реализация (2) имеет вид хаотического сигнала. Видно, что после включения адаптации следует сложный переходной процесс, связанный, очевидно, с эволюцией топологии сети, который приводит к качественному изменению режима колебаний. На рис. 1*б* приведена временная зависимость величины $r(t)$, отражающей упорядоченность системы и являющейся степенью когерентности осцилляторов:

$$r(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\varphi_i(t)}. \qquad (3)$$

Легко заметить, что параметр порядка $r(t)$ резко возрастает при включении адаптационного механизма (рис. 1*б*), что свидетельствует о возникновении синхронных сильносвязанных структур [11].

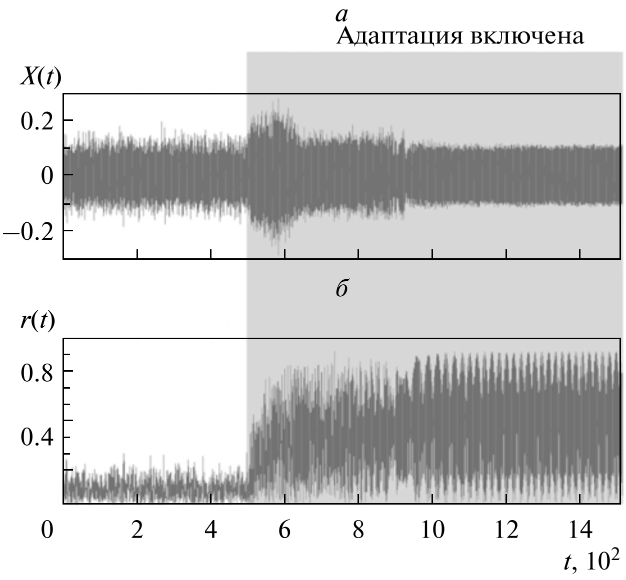

Рис. 1. *а* – суммарный вектор состояния элементов сети в зависимости от времени; *б* – параметр порядка ($r(t)$) в зависимости от времени. Количество элементов $N = 200$.

При этом следует отметить, что параметр $r(t)$ может быть рассчитан только с использованием локальных характеристик всех элементов сети (векторов состояния каждого элемента). Однако его временная эволюция дает нам только общее представление о динамике системы во время эволюции ее топологии и не позволяет судить о количестве и характеристиках образовавшихся в ней структур.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА

Как было упомянуто выше, при анализе динамики реальных сетей в большинстве случаев известна динамика только макроскопических параметров системы. В качестве таких параметров могут выступать суммарные сигналы, образованные взаимодействующими элементами как всей рассматриваемой сети, так и отдельными группами элементов, входящих в ее состав. Очевидно, что изменения в топологии сети приводят к изменениям характеристик указанных суммарных сигналов, что дает возможность использовать их для исследования динамики структуры сети и режимов синхронизации, наблюдающихся в ней.

Для анализа сложных сигналов с изменяющимся во времени спектральным составом наиболее эффективно применяется аппарат непрерывного вейвлетного преобразования. Данный метод обеспечивает наилучшее разрешение по времени и частоте и позволяет изучать временную эволюцию спектрального состава исследуемого сигнала. В настоящей работе анализ сигнала (2), соответствующего макроскопической характеристике сети осцилляторов Курамото, проводится при помощи вейвлетного преобразования, которое имеет вид

$$w(\omega, t) = \sqrt{\omega} \int_{t-\frac{4}{\omega}}^{t+\frac{4}{\omega}} X(t')\psi^*(\omega(t-t'))dt', \qquad (4)$$

где ω соответствует частотам, по которым происходит разложение анализируемого сигнала, $\psi^*(t-t')$ – материнский вейвлет, символ (*) обозначает комплексное сопряжение. В качестве материнской функции используется вейвлет Морле.

На рис. 2*а*, 2*б* показан результат применения преобразования (4) для сигнала, приведенного на рис. 1*а*. Также на рис. 2*в*, 2*г* представлены визуализации структуры исследуемой сети, построенные с использованием матриц связей ее элементов.

Рис. 2*а* отражает распределение амплитуды вейвлетного преобразования по частотам до включения адаптации ($t_1 = 490$). В данном случае связи между элементами заданы случайным образом и не меняются со временем. Хорошо видно, что энергия распределена по частотам достаточно равномерно. В то же время обособленные спектральные компоненты все же присутствуют, что соответствует наличию групп элементов, синхронизованных между собой. Однако следует отметить, что отсутствие эволюции связей не дает эле-

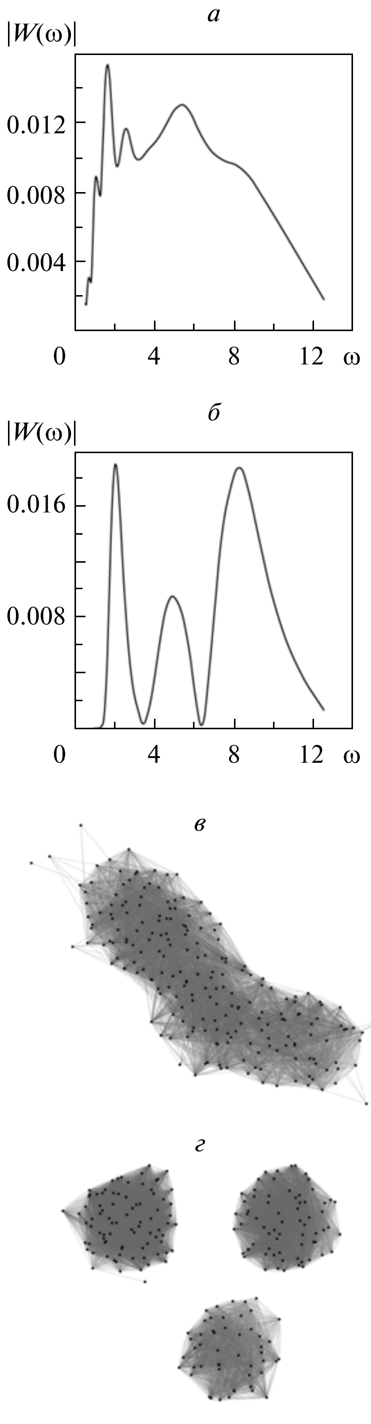

Рис. 2. Амплитудные вейвлетные спектры суммарного вектора состояния элементов (*а*, *б*) и визуализации (*в*, *г*) исследуемой сети, соответствующие моментам времени $t = 500$ (*а*, *в*), $t = 1300$ (*б*, *г*).

ментам образовать синхронные обособленные кластеры. Данное состояние системы проиллюстрировано на рис. 2*в*, где показана визуализация топологии сети в момент $t_1 = 490$.

В момент времени $t_2 = 1300$, соответствующий режиму, установившемуся в системе после переходного процесса адаптации (что хорошо видно на рис. 1*б*), на распределении амплитуды вейвлетного преобразования от частоты (рис. 2*б*) возникают три отдельных пика, каждый из которых соответствует синхронному кластеру, образовавшемуся в сети. На рис. 2*в* представлена структура сети в данный момент времени. Хорошо видно, что элементы сгруппированы в три обособленных структурных кластера.

Следует отметить, что пики вейвлетного спектра (рис. 2*б*) имеют разную мощность, что связано с разным количеством элементов, входящих в состав синхронных кластеров (рис. 2*г*).

Таким образом, показана возможность анализа структурных изменений в сети и обнаружения возникающих кластеров при помощи вейвлетного преобразования суммарного сигнала, полученного со всех ее элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ структуры сети фазовых осцилляторов Курамото при помощи вейвлетного анализа суммарного вектора состояния, получаемого с узлов данной сети. Результаты применения метода полностью характеризуют топологию сети в различные моменты времени, что подтверждено сопоставлением результатов анализа с визуализациями топологии сети, построенными по матрицам связей ее элементов.

Таким образом, показана возможность получения информации о возникших в сети структурных кластерах при помощи соответствующего анализа макроскопических характеристик рассматриваемого ансамбля взаимодействующих элементов. Полученные результаты могут найти широкое применение в исследованиях, посвященных анализу электроэнцефалограмм (ЭЭГ) и магнитоэнцефалограмм (МЭГ) с целью детектирования режимов синхронизации нейронных ансамблей и выявления различных форм когнитивной активности.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00224). Владимир Максименко благодарит также Фонд “Династия” за стипендию, направленную на поддержку его научной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holme P.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 4. 046119.
2. *Valencia M., Pastor M.A., Fernandez-Seara V.A.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. № 5. 050905.

3. *Onnela J.P., Saramäki J., Hyvönen J. et al.* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2007. V. 104. P. 7332.
4. *Stehlé J., Voirin N., Barrat A. et al.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. № 3. 035101.
5. *McPherson M., Smith-Lovin L., MCook J.* // Ann. Rev. Sociol. 2001. V. 27. P. 415.
6. *Ulhaas P.J.* // Frontiers Neurosc. 2009. V. 3. P. 17.
7. *Van Ooyen A.* // Computation in Neural Systems. 2001. V. 12. P. R1.
8. *Tang J., Scellato S., Musolesi M., Mascolo C., Latora V.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 81. 055101.
9. *Boccaletti S., Ivanchenko M., Latora V.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. № 4. 045102.
10. *Aoki T., Aoyagi T.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 034101.
11. *Assenza S., Gutierrez R., Gomez-Gardenes J. et al.* // Sci. Rep. 2013. V. 1. № 99. P. 1.
12. *Arenas A., Díaz-Guilera A., Pérez-Vicente C. J.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. № 11. P. 114102.
13. *Bullmore E., Sporns O.* // Nat. Rev. Neurosci. 2009. V. 10. P. 186.
14. *Moreno Y., Pacheco A.F.* // Europhys. Lett. 2004. V. 68. № 4. P. 603.
15. *Kuramoto Y., Araki H.* // Lecture Notes in Physics. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics 39. N. Y.: Springer-Verlag, 1975. P. 420.
16. *Fujiwara N., Kurths J., Dı´az-Guilera* // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. 025101.