УДК 517.9

МЕТОД ФАЗОВЫХ ТРУБОК ДЛЯ АНАЛИЗА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Ключевые слова: обобщенная синхронизация; пространственно-распределенные системы; фазовая трубка.
Предложен метод фазовых трубок для анализа обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах. Показано, что для установления факта наличия синхронного режима в исследуемой системе достаточно перейти к анализу ее дискретного представления.

Исследование обобщенной хаотической синхронизации связанных динамических систем представляется в настоящее время одной из актуальных задач нелинейной динамики [1–2]. Изначально понятие обобщенной синхронизации было введено в рассмотрение для двух однонаправлено связанных динамических систем [1], а позднее было обобщено на взаимно связанные системы и сети связанных нелинейных элементов [3].

Режим обобщенной синхронизации в системах с малым числом степеней свободы (потоковых системах и дискретных отображениях) в настоящее время изучен достаточно хорошо [1–5]. Представляет интерес исследование обобщенной синхронизации в пространственно-распределенных системах, что требует разработки новых методов анализа синхронного поведения в таких системах.

Изначально под режимом обобщенной синхронизации пространственно-распределенных сред, также как и в случае систем с малым числом степеней свободы, понималось установление функционального соотношения между состояниями этих систем в каждой точке пространства взаимодействия [6–7]. Позднее для систем с малым числом степеней свободы было обнаружено, что традиционная концепция обобщенной синхронизации таких систем нуждается в корректировке и уточнении, т. к. состояния этих систем в общем случае оказываются связанными между собой функционалом, а не функциональным соотношением, как считалось ранее [5; 8–10]. Для диагностики обобщенной хаотической синхронизации в данном случае был предложен метод фазовых трубок [5; 8], который позволяет расширить инструментарий, используемый при изучении обобщенной хаотической синхронизации. В настоящей работе этот метод обобщается на пространственно-распределенные системы.

Рассмотрим две пространственно-распределенные системы, состояние которых однозначно характеризуется функциями (которые могут быть как действительными, так и комплексными) $u(x,t)$ и $v(x,t)$, $x \in [0,L]$, $t \in [0,\infty)$, а их поведение с течением времени в автономном состоянии определяется оператором эволюции $\hat{L}$:

$$u(x,t) = \hat{L}u(x,t) \tag{1}$$

и

$$v(x,t) = \hat{L}v(x,t). \tag{2}$$

Будем считать, что при соответствующем выборе значений управляющих параметров в системах возможно установление хаотических колебаний.

В качестве примера подобных систем, например, можно рассматривать нелинейные активные среды, описываемые комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - \alpha |u|^2 u + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0,L]; \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - \alpha |v|^2 v + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in [0,L], \tag{4}$$

с периодическими граничными условиями:

$$u(x,t) = u(x+L,t), \qquad v(x,t) = v(x+L,t), \tag{5}$$

где L – пространственный период системы.

Если системы $u(x,t)$ и $v(x,t)$ однонаправлено связаны между собой[1], и в них установился режим обобщенной хаотической синхронизации, состояния взаимодействующих систем связаны друг с другом с помощью функционала $\mathrm{F}[\cdot]$:

$$u = \mathrm{F}[v]. \tag{6}$$

Согласно концепции обобщенной хаотической синхронизации, синхронный режим означает, что под влиянием ведущей системы $v(x,t)$ ведомая система

[1] Далее считается, что $v(x,t)$ является ведущей системой, а $u(x,t)$ – ведомой.

$u(x,t)$ приходит в состояние, однозначно определяемое состоянием ведущей системы, при этом этот процесс «сходимости» определяется величиной старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_r^1 < 0$. Иными словами, за определенный интервал времени τ ведущая система вынуждает ведомую систему прийти в состояние, которое не зависит от начальных условий. Состояние ведомой системы $u(x_*,t)$ в некоторой выбранной точке с координатой x_* в момент времени t при этом определяется не только состоянием ведущей системы $v(x,t)$ в этот же самый момент времени на всей длине L рассматриваемой системы, но и всей предысторией состояния ведущей системы на протяжении интервала времени длительностью $\tau \sim 1/|\lambda_r^1|$.

Выберем некоторый произвольный момент времени t_* и зафиксируем состояние ведущей системы $v(x,t)$ на интервале времени $(t_* - \tau, t_*]$ в качестве опорного состояния $v(x,t)|_{t=t_*-\tau}^{t_*} = v(x,t_*+s)|_{s=-\tau}^{0}$. Далее, будем отслеживать эволюцию взаимодействующих систем и фиксировать моменты времени t_i ($i = 1,2,\ldots$), когда выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &|v(x,t_i+s) - v(x,t_*+s)| < \varepsilon, \\ &\forall s \in [-\tau,0) \quad \& \quad \forall x \in [0,L], \end{aligned} \tag{7}$$

(где ε – наперед заданная малая величина), т. е. те моменты времени, когда состояние ведущей системы $v(x,t)|_{t=t_i-\tau}^{t_i}$ оказывается близким к зафиксированному опорному состоянию $v(x,t)|_{t=t_*-\tau}^{t_*}$ на всем интервале времени длительностью τ.

Введем в рассмотрение малые функции

$$\delta v_i(x,s) = v(x,t_i+s) - v_*(x,s), \qquad s \in [-\tau,0), \tag{8}$$

и

$$\delta u_i(x) = u(x,t_i) - u(x,t_*), \tag{9}$$

характеризующие малые отклонения состояний ведущей и ведомой систем от выбранных опорных состояний $v_*(x,s)|_{s=-\tau}^{0} = v(x,t_*+s)|_{s=-\tau}^{0}$ и $u(x,t_*)$. Очевидно, что количество пар функций $\delta v_i(x,s)$ и $\delta u_i(x)$ определяется значениями управляющих параметров системы, величиной ε, задающей степень близости состояний системы к опорным состояниям, и длительностью интервала времени T, на котором анализируется эволюция взаимодействующих систем.

С учетом введенных обозначений для найденных моментов времени t_i и фиксированной точки $x_* = y$ соотношение (6) может быть записано в виде:

$$u(y) + \delta u_i(y) = \mathrm{F}[v_*(x,s) + \delta v_i(x,s), y]|_{x=0}^{L}|_{s=-\tau}^{0}. \tag{10}$$

С учетом малости отклонения $\delta v_i(x,s)$ функционал F может быть разложен в ряд:

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}[v_*(x,s) + \delta v_i(x,s), y] \approx \\ &\approx \mathrm{F}[v_*(x,s), y] + \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{L} \frac{\delta \mathrm{F}[v_*(x,s), y]}{\delta v} \delta v_i(x,s)\,dx\,ds, \end{aligned} \tag{11}$$

и, принимая во внимание, что

$$u(y) = \mathrm{F}[v_*(x,s), y], \tag{12}$$

можно получить

$$\delta u_i(y) = \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{L} \frac{\delta \mathrm{F}[v_*(x,s), y]}{\delta v} \delta v_i(x,s)\,dx\,ds. \tag{13}$$

Отметим, что динамика во времени $v(x,t)$ определяется оператором эволюции $\hat{L}$ (см. соотношение (2)) и начальными условиями, поэтому для $v_i(x,s)$ можно записать, что

$$v_i(x,s) = \Phi[v_i(\xi,0), x, s]|_{\xi=0}^{L}. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$v_*(x,s) = \Phi[v_*(\xi,0), x, s]|_{\xi=0}^{L}. \tag{15}$$

С учетом малости возмущения $\delta v_i(x,s)$ соотношение (14) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &v_*(x,s) + \delta v_i(x,s) = \Phi[v_*(\xi,0) + \delta v_i(\xi,0), x, s] \approx \\ &\approx \Phi[v_*(\xi,0), x, s] + \int_{0}^{L} \frac{\delta \Phi[v_*(\xi,0), x, s]}{\delta v} \delta v_i(\xi,0)\,d\xi, \end{aligned} \tag{16}$$

откуда, с учетом (15), получаем

$$\delta v_i(x,s) = \int_{0}^{L} \frac{\delta \Phi[v_*(\xi,0), x, s]}{\delta v} \delta v_i(\xi,0)\,d\xi. \tag{17}$$

Теперь, с учетом (17), соотношение (13) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} &\delta u_i(y) = \\ &= \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{L}\int_{0}^{L} \frac{\delta \mathrm{F}[v_*(x,s), y]}{\delta v} \frac{\delta \Phi(v_*(\xi,0), x, s)}{\delta v} \delta v_i(\xi,0)\,dx\,ds\,d\xi. \end{aligned} \tag{18}$$

Обозначая

$$K(y,\xi) = \int_{-\tau}^{0}\int_{0}^{L} \frac{\delta \mathrm{F}[v_*(x,s), y]}{\delta v} \frac{\delta \Phi(v_*(\xi,0), x, s)}{\delta v}\,ds\,dx, \tag{19}$$

получим, что малые возмущения опорного состояния в ведущей $\delta v_i(x,0)$ и ведомой $\delta u_i(y)$ системах в момент времени t_i связаны друг с другом интегральным уравнением Фредгольма I-го рода

$$\delta u_i(y) = \int_0^L K(y,\xi)\delta v_i(\xi,0)d\xi, \qquad (20)$$

однако ядро $K(y,\xi)$ этого интегрального уравнения является неизвестным, поскольку изначально неизвестны F и Φ. В то же самое время из эволюции рассматриваемых систем известны функции $\delta u_i(y)$ и $\delta v_i(\xi,0)$.

Одним из возможных способов проверки того, что соотношение (20) выполняется (а следовательно, рассматриваемые пространственно-распределенные системы находятся в режиме обобщенной хаотической синхронизации), является переход к дискретному представлению. Подобный переход, конечно, является приближенным рассмотрением, однако он может позволить численно решить проблему верификации соотношения (20).

Дискретизуем рассматриваемое пространство и выделим на нем фиксированный набор точек с координатами $x_j \in [0,L]$, $j=0,\ldots,N$. Тогда для точки x_j соотношение (20) приближенно может быть записано как

$$\delta u_i(y_j) = \sum_{k=0}^{N} a_{jk}\delta v_i(\xi_k,0). \qquad (21)$$

Очевидно, что для всех N точек по пространству будет получено матричное соотношение

$$\begin{pmatrix} \delta u_i(y_1) \\ \delta u_i(y_2) \\ \vdots \\ \delta u_i(y_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_i(\xi_1,0) \\ \delta v_i(\xi_2,0) \\ \vdots \\ \delta v_i(\xi_N,0) \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

которое можно записать в виде

$$\delta\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\delta\mathbf{v}_i, \qquad (23)$$

где $\delta\mathbf{u}_i = (\delta u_i(y_1), \delta u_i(y_2), \ldots, \delta u_i(y_N))^T$,
$\delta\mathbf{v}_i = (\delta v_i(y_1,0), \delta v_i(y_2,0), \ldots, \delta v_i(y_N,0))^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что для двух пространственно-распределенных систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, должно выполняться соотношение (23). Очевидно, что для каждого выбранного фиксированного момента времени t_* матрица $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ будет своя, при этом, конечно, явный вид ее коэффициентов a_{ij} будет неизвестен. Тем не менее, если для двух взаимодействующих пространственно-распределенных сред для выбранного фиксированного момента времени t_* известны $m > N$ пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x,0)$, то выполнение соотношения (23) может быть проверено аналогично тому, как это было сделано при реализации метода фазовых трубок для систем с конечным числом степеней свободы [5; 8].

Действительно, можно выбрать N пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x,0)$ (из m существующих), при этом для каждой i-й пары должно выполняться соотношение (23). Иными словами, эти N пар функций дают N^2 линейных уравнений с N^2 неизвестными величинами (в роли которых выступают коэффициенты a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$). Тогда, решив эту систему линейных уравнений, можно определить значения коэффициентов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ и на оставшихся неиспользованными $(m-N)$ состояний проверить выполнение (23). Очевидно, что решение рассматриваемой системы линейных уравнений всегда существует и всегда единственно, если только использованные для ее составления N пар функций $\delta u_i(x)$ и $\delta v_i(x,0)$ не являются линейно зависимыми. Очевидно также, что при достаточно большом наборе пар функций (m значительно превосходит N) выбрать N линейно независимых пар не составляет труда, что означает, что при наличии достаточно длинных временных реализаций задача нахождения коэффициентов a_{ij} матрицы $\mathbf{A}$ может быть решена всегда, и, соответственно, также всегда может быть проверена корректность соотношения (23). Для этого необходимо вычислить вектора

$$\delta\mathbf{w}_k = \mathbf{A}\delta\mathbf{v}_k, \qquad (25)$$

где $k = m-N,\ldots,m$, и сравнить их с векторами $\delta\mathbf{u}_k$, полученными из временной реализации.

Таким образом, в настоящей работе предложено обобщение метода фазовых трубок на пространственно-распределенные системы. Показано, что для проверки факта наличия обобщенной синхронизации в таких системах достаточно перейти к дискретному представлению пространственно-распределенной системы и осуществлять анализ синхронного режима в ней подобно тому, как это делалось для систем с малым числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980-994.
2. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281-1310.

3. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* Generalized synchronization in mutually coupled oscillators and complex networks // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 036216.
4. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528-4535.
5. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. № 3. P. 037201.
6. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* Generalized synchronization in coupled Ginzburg-Landau equations and mechanisms of its arising // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. № 3. P. 037201.
7. *Filatov R.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Chaotic synchronization in coupled spatially extended beam-plasma systems // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301-308.
8. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E.* Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization // Chaos, Solitons & Fractals. 2013. V. 46. P. 12-18.
9. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Павлов А.С., Филатова А.Е., Храмов А.Е., Храмова М.В., Шурыгина С.А.* Обобщенная синхронизация в сетях связанных нелинейных элементов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 5. С. 1424-1427.
10. *Фролов Н.С., Грубов В.В., Павлов А.Н., Храмов А.Е., Куркин С.А., Храмова М.В.* Оптимизация физических процессов в цепочке однонаправленно связанных генераторов хаотических сигналов на виртуальном катоде // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 4. С. 1443-1445.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Государственного задания № 2014/202 и 2014/931 высшим учебным заведениям на 2014 г. и плановый период 2015 и 2016 гг. в части проведения научно-исследовательских работ (СГТУ-141 и СГТУ-146) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-02-00221-а).

Поступила в редакцию 19 апреля 2014 г.

Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. PHASE TUBE METHOD FOR THE GENERALIZED SYNCHRONIZATION REGIME DETECTION IN SPATIALLY EXTENDED SYSTEMS

Phase tube method for the analysis of the generalized synchronization regime in spatially extended systems is proposed. The presence of the generalized synchronization regime is shown to be determined by the analysis of the system under study in discrete representation.

Key words: generalized synchronization, spatially extended systems, phase tube.

Короновский Алексей Александрович, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики открытых систем; Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., ведущий научный сотрудник НОЦ «Нелинейная динамика сложных систем», e-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Koronovskii Aleksey Aleksandrovich, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Physics of Open Systems Department; Saratov State Technical University named after Y.A. Gagarin, Leading Scientific Worker of “Nonlinear Dynamics of Complex Systems”, e-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Москаленко Ольга Игоревна, Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики открытых систем, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Moskalenko Olga Igorevna, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Physics of Open Systems Department, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Храмов Александр Евгеньевич, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры электроники, колебаний и волн; Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., ведущий научный сотрудник НОЦ «Нелинейная динамика сложных систем», e-mail: hramovae@gmail.com

Hramov Aleksander Evgenyevich, Saratov State University named after N.G. Chernyshevsky, Saratov, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of Electronics, Fluctuations and Waves Department; Saratov State Technical University named after Y.A. Gagarin, Leading Scientific Worker of “Nonlinear Dynamics of Complex Systems”, e-mail: hramovae@gmail.com